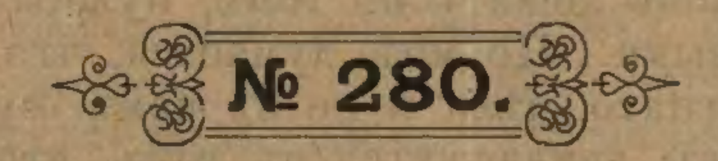
XXIV Сем. № 4.

# ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
# ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.






## ОТЪ РЕДАКЦІИ.

Подписчики „Вѣстника Опытной Физики и Элементарной Математики“, желающіе получить безплатно статьи: „Физическая жизнь нашей планеты на основаніи современныхъ воззрѣній“, а также „Матерьялы для климатологіи Юго-Запада Россіи“ и другія изданія Метеорологической Обсерваторіи Императорскаго Новороссійскаго Университета, благоволятъ обращаться письменно по слѣдующему адресу: **Одесса, Университетъ.** Профессору ***Александру Викентьевичу Клоссовскому.***

## Объ измѣненіи курса математики въ 3-мъ классѣ.

**Докладъ читанный въ засѣданіи Отдѣленія Педагогическаго Общества по математикѣ 21 января и 15 февраля 1900 года.**

Дм. Галанинъ.

Вопросы, выдвинутые въ жизнь циркуляромъ Г-на Министра Народнаго Просвѣщенія, затрагиваютъ общій строй современной школьной системы. Эти вопросы, относящіеся къ учебному строю и къ программамъ, относятся и ко внутренней жизни, къ намъ,

учителямъ! Не мѣшаетъ подумать и о томъ, что каковы бы ни были оффиціальныя требованія программъ, и какъ бы хорошо ни были составлены къ нимъ объяснительныя записки, какъ бы строги ни были предписанія о неуклонномъ ихъ исполненіи, какъ бы, наконецъ, тщательно ни слѣдило начальство за этимъ исполненіемъ, все таки дѣло находится въ нашихъ, учительскихъ, рукахъ, и мы имѣемъ тысячи способовъ повернуть его такъ или иначе, и внести въ него ту живую душу, которую не въ силахъ внести ни инструкція, ни ревизія.

Въ настоящее время центръ тяжести во всѣхъ обсужденіяхъ школьныхъ порядковъ лежитъ въ томъ, нужны или не нужны для юношей древніе языки. Но мнѣ думается, что это не есть коренной вопросъ школьнаго дѣла и не въ немъ суть. Суть дѣла, на мой личный взглядъ, заключается въ томъ, что въ нашихъ школахъ до сихъ поръ еще сохранился столь суровый методъ, который, по выраженію Лютера, служитъ «пугаломъ для мальчиковъ и застѣнкомъ для умовъ». Облегченіе дѣтей съ этой стороны составляетъ задачу педагога, и въ этомъ отношеніи намъ не мѣшаетъ какъ познакомиться съ педагогическими сочиненіями, хотя бы того же Амоса Коменскаго, такъ и поглубже всмотрѣться въ умственный кругозоръ дѣтей, и соотвѣтственно этому направлять учебное дѣло.

Для историка школьнаго дѣла будетъ крайне любопытно отмѣтить тотъ фактъ, что когда въ XIX-мъ вѣкѣ всѣ науки усвоили методъ опытный и двинулась по этому впередъ, школа упорно сохранила средневѣковыя преданія и бережно пронесла ихъ черезъ много столѣтій, какъ будто для того, чтобы люди не позабыли окончательно о горечи корня ученія. Такъ для изученія языковъ была сохранена грамматика, а въ математикѣ остался нетронутымъ цѣлый отдѣлъ средневѣковья, именуемый «тройными правилами».

Въ то время какъ алгебра даетъ намъ легкій и изящный способъ рѣшенія всевозможныхъ задачъ, встрѣчающихся въ наукѣ и жизни, въ 3-мъ классѣ средней школы ученики должны познакомиться съ нѣкоторыми средневѣковыми пріемами рѣшенія особыхъ, для этой именно цѣли придуманныхъ, задачъ, которыя не встрѣчаются ни въ наукѣ, ни въ жизни,—они встрѣчаются только въ курсѣ ариѳметики 3-го класса

Защитники этихъ задачъ указываютъ обыкновенно на важность метода рѣшенія, а именно, здѣсь, говорятъ они, выясняется идея пропорціональности и методъ приведенія къ единицѣ, играющіе такую важную роль въ дальнѣйшемъ курсѣ.

Не оспаривая важности усвоенія такихъ основныхъ понятій, я позволю себѣ указать на то, что методъ приведенія къ единицѣ уже знакомъ ученикамъ изъ курса первыхъ двухъ классовъ, а что касается до идеи пропорціональности, то она по моему не свойственна большинству ариѳметическихъ задачъ и скорѣе затемняется ими, чѣмъ выясняется. Я хочу сказать этимъ, что идея пропорціо-

нальности не входитъ въ ариѳметику, и на мой взглядъ выясненіе этой идеи не можетъ быть дано на томъ рядѣ задачъ, которыя пріурочиваются для этой цѣли. Въ вопросахъ ариѳметики, особенно въ задачахъ, лежитъ на мой взглядъ идея средняго ариѳметическаго. Пропорціональность непремѣнно требуетъ непрерывности измѣненія, какъ напр. вѣсъ и масса, углы и дуги и т. п., тогда какъ въ основѣ ариѳметическихъ вопросовъ въ огромномъ большинствѣ предлагаемыхъ задачъ входятъ прерывныя величины, вообще говоря, не съ одинаковыми интервалами.

Такова напр. хотя бы слѣд. задача: «20 яблоковъ стоитъ 40 коп. Сколько будетъ стоить десятокъ?» Въ такомъ видѣ задача собственно неопредѣленная, ибо можетъ быть, что одинъ десятокъ стоитъ 25 коп., а другой 15 коп. Для опредѣленности задачи нужно непремѣнно добавить слова: «среднимъ числомъ». Тѣ же вопросы, гдѣ содержится чистая идея пропорціональности, опять таки относятся къ курсамъ первыхъ двухъ классовъ, каковы напр. вопросы объ измѣненіи произведенія съ измѣненіемъ множителей и т. п. Между тѣмъ, какъ въ погонѣ за выясненіемъ идеи пропорціональности часто пользуются задачами, не имѣющими смысла. Такъ напр. такая задача: „5 писцовъ переписываютъ сочиненіе въ 20 дней. Сколько надо писцовъ, чтобы переписать его въ 10 дней?“

Но, не оспаривая важности идеи пропорціональности, и даже соглашаясь съ тѣмъ, что она должна быть усвоена учениками средней школы въ возможно раннемъ возрастѣ, я думаю, что придумываніе разнаго рода правилъ для ея выясненія все таки лишнее.

Во первыхъ, что это за правила? Есть ли это такія же ариѳметическія правила, съ которыми ученики встрѣчались въ первыхъ 2-хъ классахъ, или это есть особыя не ариѳметическія правила, еще не изученныя учениками? Мнѣ думается, что эти правила слѣдовало бы назвать правильнѣе — шаблонами, ибо каждое изъ нихъ есть шаблонъ для рѣшенія подходящихъ вопросовъ. Почему эти правила называютъ «тройными»? Если для рѣшенія этихъ вопросовъ обратиться къ задачамъ, то задачи на простое тройное правило встрѣчались и раньше, и не требовали для своего рѣшенія изученія новаго правила! Эти задачи просто и понятно рѣшаются при помощи уже извѣстныхъ ариѳметическихъ правилъ и непонятно, зачѣмъ понадобилось вводить новый хитрый пріемъ ихъ рѣшенія, при этомъ часто искажая въ рѣшеніи естественный ходъ разсужденія. Такъ напр. такая задача: «поѣздъ проходитъ разстояніе въ 600 верстъ въ 30 часовъ, во сколько времени онъ пройдетъ разстояніе въ 800 верстъ?» Простое рѣшеніе вопроса состоитъ въ опредѣленіи скорости движенія, и тогда можно будетъ опредѣлить и время 2-го движенія.

Такъ и рѣшается эта задача, если она помѣщена въ курсѣ 1-го класса. Но разъ она написана среди задачъ на простое тройное правило, тогда разсуждать такъ нельзя, а нужно, придерживаясь шаблона, опредѣлить, во сколько времени поѣздъ пройдетъ 1 версту и т. д.

Отдѣлъ на простое тройное правило, вообще говоря, богатъ такими задачами, гдѣ приходится прибѣгать къ чисто искусственному методу рѣшенія и искусственному ходу разсужденія. Такимъ образомъ для ученика «новыя правила» сопровождаются новымъ методомъ не только искусственнымъ, но и малопонятнымъ. А это обстоятельство вноситъ не малую путаницу въ голову ученика, гдѣ уже начинаютъ бродить кое какія свѣтлыя мысли, навѣянныя стройнымъ курсомъ 1-хъ классовъ.

Далѣе идетъ сложное тройное правило съ задачами въ высшей степени многодѣльными, гдѣ мысль не можетъ сосредоточиться даже на методѣ, вслѣдствіе утомительнаго повторенія одного и того же. Остается чистый шаблонъ безо всякаго умственнаго анализа. Слова «больше» и «меньше» мелькаютъ въ изложеніи чисто автоматически.

Не лучше обстоитъ дѣло и тогда, когда для рѣшенія этихъ задачъ прибѣгаютъ къ пропорціямъ. Во 1) пропорція чужда курсу ариѳметики (мѣсто ея въ алгебрѣ); во 2) въ задачахъ на простое тройное правило еще пропорція имѣетъ нѣкоторый смыслъ, хотя чисто искусственный; но при рѣшеніи задачъ на сложное тройное правило методъ пропорцій есть методъ рѣшенія уравненій со многими неизвѣстными, а такія уравненія не проходятся въ 3-мъ классѣ, и пользованіе пріемомъ, хотя простымъ, но не понятнымъ для учениковъ, едва ли хорошо. Вообще полное изученіе свойствъ пропорцій въ 3-мъ классѣ еще непосильно для учениковъ, а безъ этого изученія трудно пользоваться и самыми пропорціями при рѣшеніи задачъ. И здѣсь, какъ и въ первомъ методѣ, остается одинъ малопонятный для ученика шаблонъ.

Вообще въ этомъ курсѣ какъ будто все слилось такъ, чтобы сдѣлать этотъ курсъ вполнѣ непосильнымъ. Задачи рѣшаются по малопонятнымъ шаблонамъ, да и содержаніе ихъ по большей части довольно странно. Въ самомъ дѣлѣ вотъ задача изъ задачника Верещагина № 2584. «Пятнадцать работниковъ и 12 работницъ, занимаясь ежедневно по 10 час. 30 мин., сняли съ поля хлѣбъ въ 12 дней. Во сколько дней 21 работникъ и 8 работницъ, занимаясь въ день по 8,4 часа уберутъ хлѣбъ съ поля, длина котораго относится къ длинѣ перваго какъ $0,3 : \frac{1}{5}$, и котораго ширина относится къ ширинѣ перваго какъ 0,51 : 0,5 (6), — если при томъ извѣстно, что сила мужчины относится къ силѣ женщины, какъ 0,2(6) : 0,1(9)?»

Такая задача не представляетъ собою большого исключенія. Современная школьная практика подняла трудность задачъ на недосягаемую высоту и трудно преодолимую многодѣльность. Я позволю себѣ обратить вниманіе читателя въ приведенной задачѣ на отношенія, которыя даны въ дробяхъ, да еще періодическихъ.

Но, пойдемъ дальше! Дальше идетъ новое правило, «правило процентовъ». Это правило на первый взглядъ имѣетъ практическій характеръ знакомства съ коммерческой ариѳметикой. Но дѣло въ

томъ, что ни одинъ коммерсантъ не пользуется школьнымъ методомъ для веденія своихъ дѣлъ, а между тѣмъ въ задачи вводятся малопонятныя слова биржевого міра: «вексель, акція, облигація, рента, курсъ на Лондонъ» и т. п. Съ точки зрѣнія педагогики всѣ эти слова должны быть объяснены и растолкованы ученикамъ, но существуютъ многіе преподаватели, какъ напр. я самъ, которые не могутъ дать яснаго, отчетливаго объясненія этихъ словъ. Да и вообще, мнѣ думается, знакомить мальчишекъ 3-го класса, въ возрастѣ отъ 12-ти лѣтъ, съ такими практическими элементами коммерческаго дѣла нѣсколько рано.

Въ этомъ отношеніи составители задачниковъ также мало стѣсняются введеніемъ новыхъ понятій, какъ мало они стѣсняются вообще трудностью предлагаемыхъ задачъ. Вотъ примѣръ: «виноторговецъ въ Вѣнѣ продаетъ въ Парижъ 120 эймеровъ вина, которое ему самому стоило 3360 австрійскихъ флориновъ, и получаетъ при этой продажѣ $6^1/_4{}^0/_0$ прибыли. Сколько флориновъ будетъ стоить въ Парижѣ литръ этого вина, если 10 литровъ равны 7 вѣнскимъ мѣркамъ, 40 мѣрокъ составляютъ 1 эймеръ, и за 100 франковъ по курсу даютъ $42^1/_2$ австрійскихъ флориновъ?»

Я не буду останавливаться далѣе на современныхъ задачахъ, скажу вообще, что тѣ изъ нихъ, которыя имѣютъ смыслъ, могутъ быть легко рѣшены или при помощи чисто ариѳметическихъ правилъ, или при помощи алгебраическаго метода—уравненій. Если же выбросить изъ курса всѣ нарочно придуманные для него задачи, то онъ не будетъ нуждаться даже въ какихъ либо особыхъ правилахъ.

Въ доброе старое время эти задачи имѣли большое значеніе, какъ практическія правила для вычисленія различнаго рода житейскихъ вопросовъ. Такъ, въ ариѳметикѣ Магницкаго дается 7 основныхъ правилъ, которыя располагаются по слѣдующимъ рубрикамъ:

1) Правило о трехъ перечняхъ въ цѣлыхъ.

2) Правило о трехъ перечняхъ въ доляхъ.

3) Правило о трехъ сократительное.

4) Правило о трехъ возвратительное.

5) Правило о пяти въ цѣлыхъ и доляхъ.

6) Правило о семи также въ цѣлыхъ и доляхъ.

7) Правило соединительное.

Всѣ эти правила соотвѣтствуютъ нашимъ «простое и сложное тройныя правила». На каждое изъ нихъ приводятся примѣры и рѣшаются помощью пропорцій. Дается обязательный шаблонъ записи и потомъ берется произведеніе соотвѣтственныхъ членовъ, которое дѣлится на 3-ье данное.

Рѣшеніе задачъ на сложное тройное правило рѣзко отличается отъ современнаго своеобразнымъ шаблономъ.

За этими правилами слѣдуютъ ихъ приложенія къ задачамъ. Эти задачи разбиты на слѣдующіе отдѣлы:

1) Приложенныя къ гражданству (количество товара и его стоимость).

2) Купля и продажа.

*Примѣръ*: Куплено 96 гусей; за половину плачено по алтыну и $3^{1}/_{2}$ денги, а за другую половину по 2 алтына безъ полуденги за гуся. Спрашивается, сколько нужно заплатить денегъ за всѣхъ гусей?

3) Торговля въ товарныхъ овощахъ и съ вывѣскою (со взвѣшиваніемъ).

*Примѣръ*: Куплено 14 кадокъ коровьяго масла и за каждый фунтъ чистаго масла заплачено по $1^{1}/_{2}$ денги, вѣсомъ же 2 бочки по 600 фунтовъ, при чемъ вѣсъ дерева приходится по 40 фунтовъ на каждые 300 фунтовъ. Спрашивается, сколько было вѣсу во всемъ маслѣ? Сколько вѣсило чистое масло? Сколько было заплачено денегъ?

4) О барышахъ и убыткахъ.

*Напримѣръ*: Куплено сукна $46^{3}/_{4}$ аршина за 13 рубл. 10 алтынъ 4 денги. Проданъ каждый аршинъ по 13 руб. и 1 денгѣ. Сколько прибыли было получено?

5) Вопросная о тройномъ правилѣ.

*Примѣръ:* Изъ сукна, которое шириною $2^{1}/_{4}$ арш., а длиною $3^{1}/_{4}$ аршина сшитъ кафтанъ. Сколько аршинъ нужно купить другого сукна, ширина котораго $1^{1}/_{2}$ арш.?

6) Вопросная о времени.

*Примѣръ*: Одинъ человѣкъ выпьетъ кадку въ 14 дней, а съ женою выпьетъ ту же кадку въ 10 дней. Спрашивается, во сколько дней жена его выпьетъ кадку одна.

7) Дѣловая въ тройномъ правилѣ:

Двое хотятъ раздѣлить 12 рублей, чтобы одному изъ нихъ взять $^{2}/_{3}$, а другому $^{3}/_{4}$. Спрашивается, сколько рублей получитъ каждый.

8) Торговля мѣновая въ тройномъ правилѣ.

Двое мѣняются товаромъ: одинъ даетъ 12 пуд. имбира, цѣною за каждые $2^{1}/_{2}$ пуда по 380 копѣекъ, другой даетъ сахаръ по 9 денегъ за фунтъ. Сколько слѣдуетъ дать сахару за весь имбирь?

9) Торговая, складная и дѣлительная.

Двое открыли вмѣстѣ торговлю и одинъ далъ на это 460 руб., а другой 390 руб. На всѣ деньги они наторговали 98 руб. Сколько получитъ каждый?

10) Торговая складная съ приказчиками и людьми ихъ.

Три человѣка сложили денегъ въ купечество. 1-ый далъ 600 рубл., 2-ой далъ 700 рубл., 3-ій далъ 800 рубл. и наняли приказчика за 360 рубл. и обѣщали ему каждый заплатить за работу изъ прибыли $^3/_8$. Прибыли получено всего 720 рубл. Сколько досталось каждому и сколько каждый далъ приказчику?

11. Торговая складная со временемъ.

Два человѣка сложились вмѣстѣ для торговли. Одинъ положилъ 10 рубл. на 7 мѣсяц.; другой 12 рубл. на 6 мѣсяц. Они получили 8 рублей прибыли. Сколько получилъ каждый?

12. Займодавняя и о срочномъ времени.

Купецъ купилъ товару на 200 рубл.; эти деньги обѣщалъ заплатить въ два срока, а именно: 75 рубл. черезъ 5 недѣль и 125 рубл. черезъ 13 недѣль. Но по соглашенію съ продавцомъ онъ согласился заплатить всѣ деньги сразу. Когда произведена была уплата?

Изъ приведенныхъ примѣровъ видно, что всѣ эти задачи, составлявшія прежде особые отдѣлы, вошли въ курсъ младшихъ классовъ на цѣлыя и дробныя числа. Кромѣ того всѣ эти задачи имѣютъ сравнительно несложный характеръ, содержатъ хорошо подобранныя числа, и для рѣшенія ихъ данъ шаблонъ, примѣнимый ко всѣмъ однороднымъ задачамъ Другими словами, всѣ вопросы ариѳметики у Магницкаго разбиты на типичныя задачи, для которыхъ и даны полныя рѣшенія. Такимъ образомъ курсъ прямой ариѳметики не имѣлъ задачника въ современномъ смыслѣ этого слова. Кромѣ указанныхъ задачъ курсъ ариѳметики содержалъ и такіе отдѣлы, какъ опредѣленіе рудъ, вычисленіе квадратныхъ и кубичныхъ корней, опредѣленіе площадей и объемовъ; вычисленіе долготъ и широтъ и представлялъ собою такимъ образомъ собраніе всевозможныхъ вопросовъ, необходимыхъ для жизни. Въ такомъ видѣ курсъ имѣлъ цѣльность и задачи на современныя тройныя правила здѣсь вполнѣ умѣстны, какъ часть нѣкотораго цѣлаго. Между тѣмъ, какъ въ настоящее время учебникъ ариѳметики освободился отъ всѣхъ этихъ отдѣловъ, отнеся ихъ къ алгебрѣ, но удержалъ при себѣ въ видѣ воспоминанія «правила о трехъ перечныхъ» назвавъ ихъ «тройными». Задачи на эти правила осложнились введеніемъ отношеній и разнаго рода понятій изъ коммерческаго дѣла, а также болѣе или менѣе сложными операціями преобразованія данныхъ, которыя въ задачѣ заданы почти всегда въ видѣ дробей простыхъ, десятичныхъ, а часто и періодическихъ.

Кстати сказать, періодическія дроби пріютились въ ариѳметикѣ совершенно не на мѣстѣ. Помимо того, что они почти никогда не встрѣчаются, кромѣ нарочно приспособленныхъ задачъ, они имѣютъ и математическую теорію трудную для учениковъ и научно плохо обоснованную. Ихъ мѣсто скорѣе въ 6-мъ классѣ, гдѣ по-

лезно вспомнить забытое прошлое и при прохожденіи прогрессій познакомиться и съ періодическими дробями.

Да и вообще не мѣшало бы нѣсколько упорядочить курсъ ариѳметики, приспособивъ его къ дѣтскому возрасту, но объ этомъ я позволю себѣ поговорить въ другой разъ. А пока, мнѣ думается, несомнѣнно наступило время разстаться съ средневѣковыми правилами и сдѣлать ихъ предметомъ изученія исторіи математики, а не школьнаго курса. Но если даже вновь выработанныя программы и не рискнутъ разстаться съ этимъ обломкомъ старины, мнѣ думается никто не помѣшаетъ намъ, учителямъ, отказаться отъ хитрыхъ и многодѣльныхъ задачъ, а ограничиться при прохожденіи этого курса самыми простыми примѣрами, гдѣ число данныхъ было бы не болѣе 7, какъ это сдѣлано хотя бы у Магницкаго. Но допустимъ на время, что этотъ отдѣлъ ариѳметики опущенъ и въ программахъ, тогда получается почти два годовыхъ урока, которые можно было бы употребить съ весьма большой пользой для школьнаго дѣла.

Здѣсь я позволю себѣ указать на важную математическую дисциплину, которая по всеобщему признанію не даетъ тѣхъ результатовъ, которые мы могли бы ожидать отъ ея изученія, а именно — на геометрію. Ученики, оканчивающіе гимназію, вообще говоря, не обладаютъ совершенно геометрическими представленіями, не только стереометрическими, но даже и планиметрическими. Отсутствіе этихъ представленій бываетъ часто поразительнымъ и сводитъ геометрію къ чисто формальному знанію теоремъ и ихъ доказательствъ.

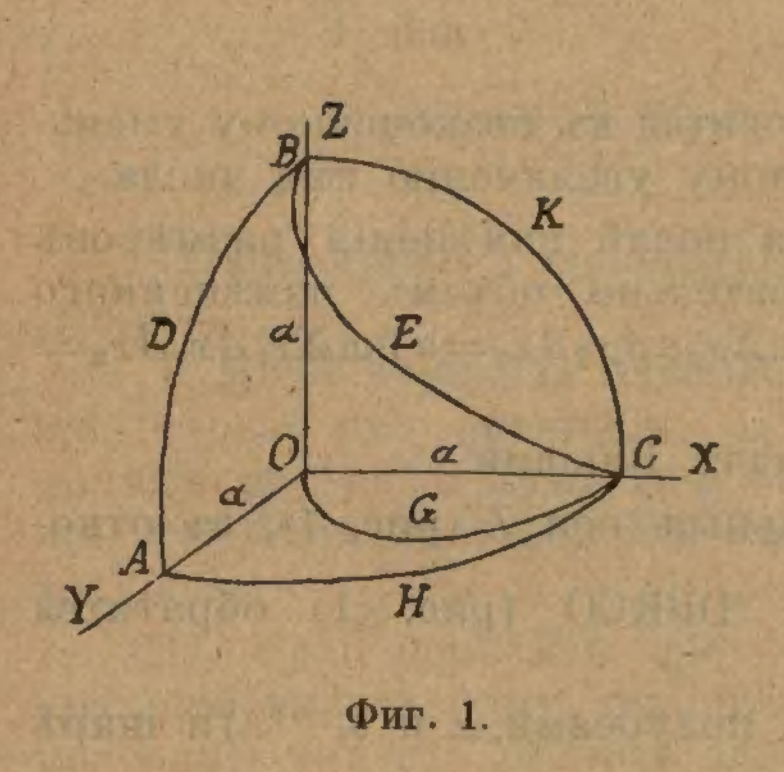
Причина такого безотраднаго явленія коренится по моему въ методѣ изученія, въ отсутствіи у учениковъ геометрическаго опыта, и связаннаго съ нимъ знакомства съ истиннымъ видомъ какой либо фигуры и ея частей. Ученики въ большинствѣ случаевъ не пользуются циркулемъ при изученіи геометріи и дѣлаютъ чертежи отъ руки. Отъ этого они не представляютъ себѣ, какъ въ дѣйствительности идутъ тѣ линіи, о которыхъ они говорятъ. Кромѣ того, начиная изучать геометрію въ 4-мъ классѣ, они одновременно знакомятся и съ новыми понятіями и съ новымъ методомъ строго логическаго доказательства, имѣющаго въ основѣ нѣсколько аксіомъ. Это доказательство, построенное на глубоко логическихъ основаніяхъ чисто философской разработки вопроса, не доступно ученикамъ и по ихъ возрасту, а главнымъ образомъ по недостатку геометрическаго опыта.

На мой взглядъ, прежде чѣмъ приступать къ изученію научной геометріи, было бы полезно дать ученикамъ этотъ геометрическій опытъ, познакомить ихъ съ геометрическими фигурами и относительной величиною ихъ частей. Вотъ эти то два часа, оставшіеся отъ ариѳметики въ 3 мъ классѣ, я и предложилъ бы употребить отчасти на усиленія алгебры, а одинъ годовой часъ на введеніе нѣкотораго, какъ бы пропедевтическаго курса геометріи, или вѣрнѣе, курса геометрическаго черченія.

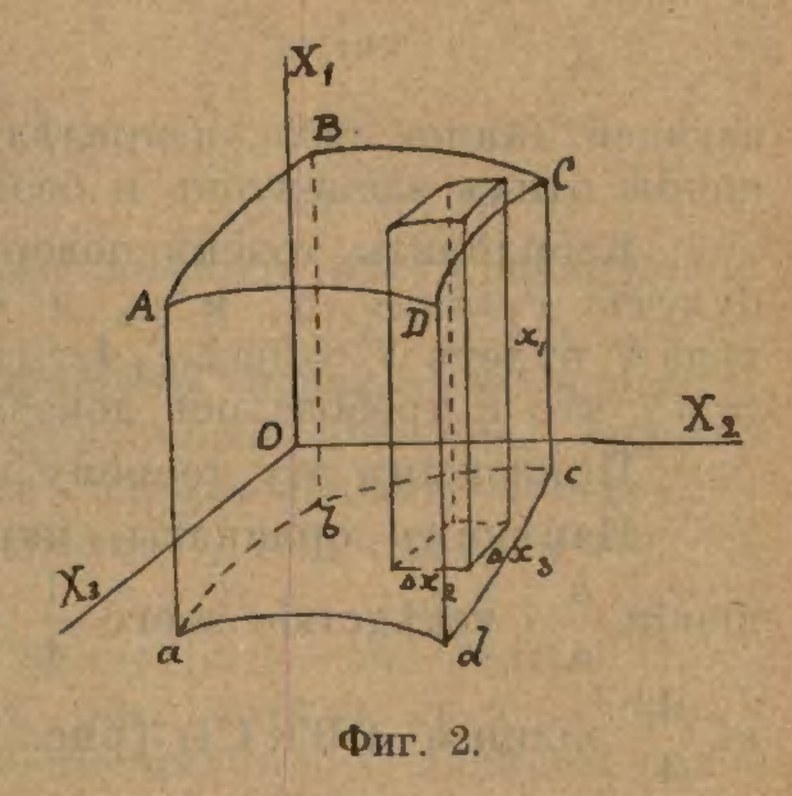
Позволяя себѣ предложить на обсужденіе такой курсъ, я замѣчу, что онъ пріуроченъ къ современному положенію школьнаго дѣла, и потому въ немъ введенъ элементъ измѣренія. Измѣреніе собственно можно было бы начать гораздо раньше, быть можетъ и весь курсъ можно было бы продѣлать гораздо раньше, чѣмъ въ 3-мъ классѣ; но такъ какъ въ этомъ классѣ есть свободное время, то я и пріурочилъ весь курсъ къ этому классу.

# Обобщеніе задачи Вивіани.

Задача Вивіани состоитъ въ слѣдующемъ: опредѣлить объемъ части шара радіуса $a$, остающейся послѣ пронизанія его двумя прямыми круговыми цилиндрами, вписанными въ два его полушарія, —иными словами опредѣлить увосьмеренный объемъ части пространства, ограниченной поверхностью шара ADBKCHA и боковою поверхностью цилиндра BECGOB—(см. рис. 1).




Фиг. 1.




Фиг. 2.

Задача эта была разрѣшена въ XVII ст. итальянскимъ математикомъ Вивіани (1622—1703) на основаніи очень сложныхъ соображеній и рѣшается сравнительно просто методами интегральнаго исчисленія. Оказывается, что объемъ вырѣзанной цилиндрами части равенъ $V_1 = {}^4/_3 \pi a^3 - {}^{16}/_9 a^3$.

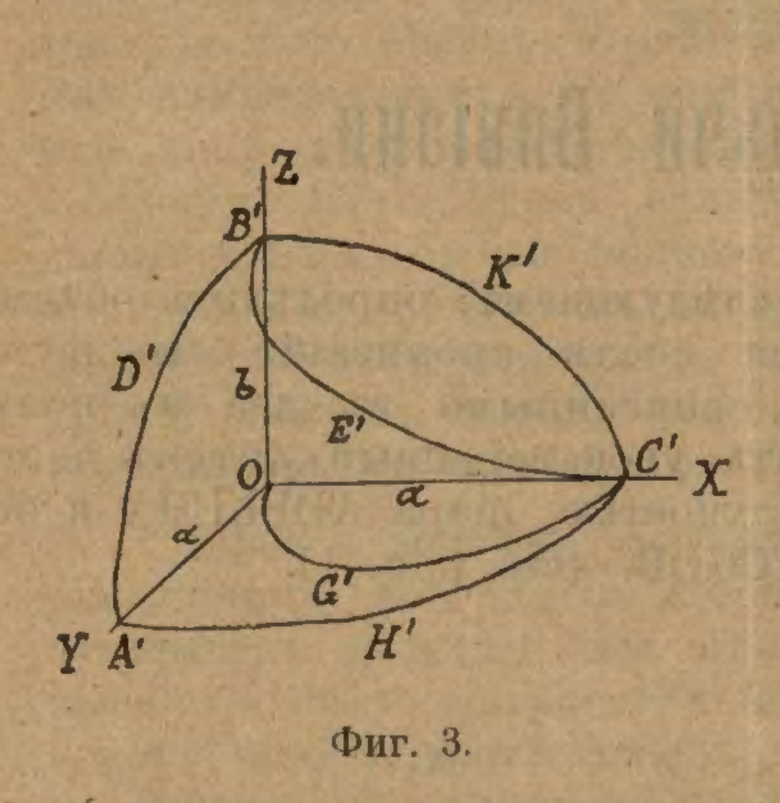
Отсюда видно, что объемъ остающейся части шара $V_2 = {}^{16}/_9 a^3$ (результатъ, интересный тѣмъ, что въ него не входитъ $\pi$).

Это рѣшеніе можетъ быть обобщено на случай эллипсоида вращенія и трехоснаго эллипсоида.

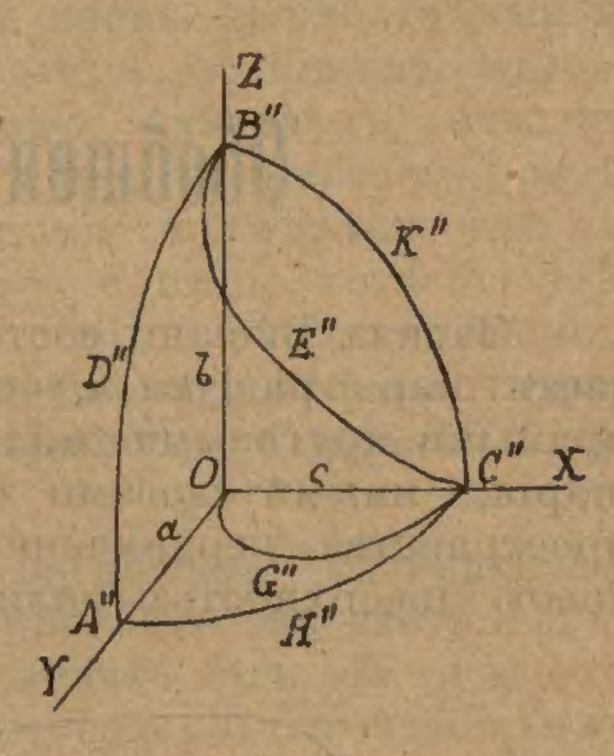
Докажемъ для этого предварительно слѣдующую теорему:

При измѣненіи размѣровъ любого тѣла въ какомъ либо направленіи въ отношеніи $\alpha$, въ томъ же отношеніи измѣнится и объемъ тѣла. *)

Представимъ объемъ даннаго тѣла въ видѣ $V = \lim \Sigma x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$**) гдѣ $x_1$ представляетъ координаты точекъ поверхности тѣла въ направленіи, параллельномъ измѣняемымъ размѣрамъ; сумма распространена по всѣмъ элементамъ части плоскости $x_2 x_3$, ограничивающей данное тѣло, а предѣлъ относится къ безконечному уменьшенію этихъ элементовъ и безконечному увеличенію ихъ числа.




Фиг. 3.




Фиг. 4.

Координаты точекъ поверхности послѣ измѣненія размѣровъ будутъ: $x'_1 = \alpha x_1$, $x_2$ и $x_3$ и слѣдовательно объемъ измѣненнаго тѣла $V'$ будетъ $V' = \lim \Sigma x'_1 \Delta x_2 \Delta x_3 = \lim \Sigma x_1 \alpha \Delta x_2 \Delta x_3 = \alpha \lim \Sigma x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 = \alpha V$ что и требовалось доказать.

Приложимъ эту теорему къ задачѣ Вивіани.

Измѣнимъ ординаты, параллельныя оси Z (рис. 1), въ отношеніи $\frac{b}{a}$; вслѣдствіе этого $\frac{1}{4}$ круга DBKCO (рис. 1) обратится въ $\frac{1}{4}$ эллипса OB'K'C'D (рис. 3) съ полуосями $a$ и $b$, ***) а шаръ обратится въ эллипсоидъ вращенія (вокругъ оси Z), пронизанный

---

*) Авторъ подъ „измѣненіемъ размѣровъ тѣла въ извѣстномъ направленіи", разумѣетъ процессъ, заключающійся въ томъ, что разстоянія отсчитываемыя отъ плоскаго основанія тѣла до его поверхности въ указанномъ направленіи, увеличиваются въ данномъ отношеніи. Ред.

**) Такое выраженіе объема соотвѣтствуетъ разбиванію его на весьма большое число весьма малыхъ прямоугольныхъ параллелепипедовъ съ ребрами $x_1$, $\Delta x_2$, $\Delta x_3$ (рис. 2).

***) Дѣйствительно, если въ уравненіи круга $x^2 + z^2 = a^2$, сдѣлаемъ $z' = z \cdot \frac{b}{a}$, то получимъ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z'^2}{b^2} = 1$, это и представляетъ уравненіе эллипса съ полуосями $a$ и $b$.

двумя круговыми цилиндрами. По теоремѣ объемы частей $V'_1$ и $V'_2$, соотвѣтствующихъ въ этомъ тѣлѣ объемамъ $V_1$ и $V_2$ (рис. 1), измѣняется тоже въ отношеніи $\frac{b}{a}$, т. е. $V'_1 = \frac{b}{a} V_1 =$

$$= \frac{b}{a}\left(\frac{4}{3}\pi a^3 - \frac{16}{9}a^3\right) = \frac{4}{3}\pi a^2 b - \frac{16}{9}a^2 b, \text{ а } V'_2 = \frac{b}{a}V_2 =$$

$$= \frac{b}{a}\cdot\frac{16}{9}a^3 = \frac{16}{9}a^2 b.$$

Измѣнимъ теперь ординаты, параллельныя оси $x_3$ въ отношеніи $\frac{c}{a}$; тогда 1) эллипсоидъ вращенія обратится въ трехосный эллипсоидъ (рис. 4) съ полуосями $a$, $b$ и $c$, а 2) пронизывающіе цилиндры,—будутъ уже не круговые, а эллиптическіе.

По теоремѣ объемы частей измѣненнаго тѣла будутъ

$$V''_1 = \frac{c}{a}V'_1 = \frac{c}{a}\left(\frac{4}{3}\pi a^2 b - \frac{16}{9}a^2 b\right) = \frac{4}{3}\pi abc - \frac{16}{9}abc$$

$$V''_2 = \frac{e}{a}V'_2 = \frac{c}{a}\cdot\frac{16}{9}a^2 b = \frac{16}{9}abc.$$

Итакъ кромѣ результата Вивіани имѣютъ мѣсто слѣдующіе выводы:

I. Если пересѣчь эллипсоидъ вращенія плоскостью, проходящей черезъ ось вращенія, и въ полученныя половины вписать прямые круговые цилиндры съ осями, параллельными оси вращенія, то объемъ остающейся части равенъ $^{16}/_9\, a^2 b$, гдѣ $b$ — полуось вращенія.

II. Если пересѣчь трехосный эллипсоидъ плоскостью, проходящей черезъ одну изъ главныхъ осей его, и въ полученныя половины вписать прямые эллиптическіе цилиндры, эллипсы основанія которыхъ имѣютъ полуоси, равныя половинамъ соотвѣтствующихъ полуосей эллипсоида, то объемъ остающейся части равенъ $^{16}/_9\, abc$.

Послѣдній выводъ можетъ быть непосредственно найденъ методами интегральнаго исчисленія, и, положивъ въ немъ $c = a$, получимъ результатъ I; если же сдѣлать $a = b = c$, — то получимъ результатъ Вивіани.

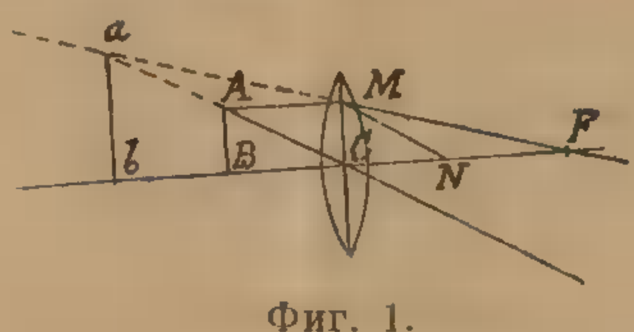
*В. П. Вейнбергъ.*

Студ. Инст. Инж. Пут. Сообщ.

# Разстояніе отъ стекла и величина изображенія предмета, помѣщеннаго предъ двояковыпуклымъ стекломъ.

## 1-й случай.

Свѣтящійся предметъ въ видѣ прямой линіи помѣщенъ передъ двояковыпуклымъ стекломъ на разстояніи меньшемъ фокуснаго (чер. 1).




Фиг. 1.

Построивъ изображеніе *) линіи AB, проводимъ MN || AC. Эти прямыя равны, какъ отрѣзки параллельныхъ между паралл. Треугольникъ MNF ∞ △ $a$FC поэтому стороны пропорціональны, но $\frac{NF}{CF} = \frac{F - CN}{F} < 1$ (CN = BC < F); слѣдовательно и $\frac{AC}{aC} < 1$. Треугольникъ ABC ∞ $ab$C; слѣдовательно $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{aC} < 1$; отсюда AB < $ab$. Фигура AMFC — трапеція, у которой AM || CF; но AM < CF, слѣдовательно продолженія непараллельныхъ сторонъ пересѣкутся въ сторону AM, какъ меньшей изъ параллельн., т. е. изображеніе въ этомъ случаѣ всегда мнимое.

## 2-й случай.

Свѣтящійся предметъ помѣщенъ на разстояніи равномъ фокусному (чер. 2).




Фиг. 2

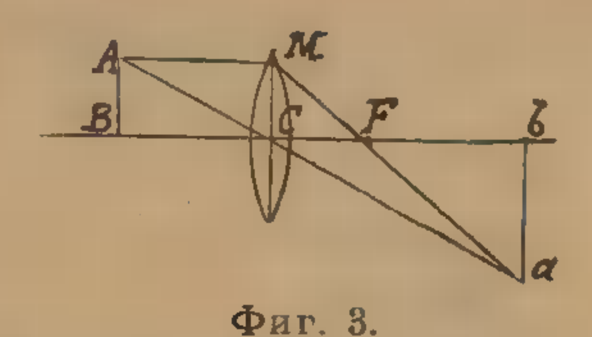
△ AMC = △ MCF (углы при C и при M прямые, сторона MC общая, AM = CF = F); поэтому ∠ FMC = ∠ MCA; слѣдовательно AC || MF т. е. изображенія совсѣмъ не получится.

---

*) При построеніи изображеній мы преломляемъ лучъ, какъ это часто дѣлаютъ, только одинъ разъ, именно при пересѣченіи плоскости, проходящей чрезъ оптическій центръ стекла и перпендикулярной къ главной оптической оси его.

## 3-й случай.

Предметъ помѣщенъ между фокуснымъ и двойнымъ фокуснымъ разстояніемъ (чер. 3).

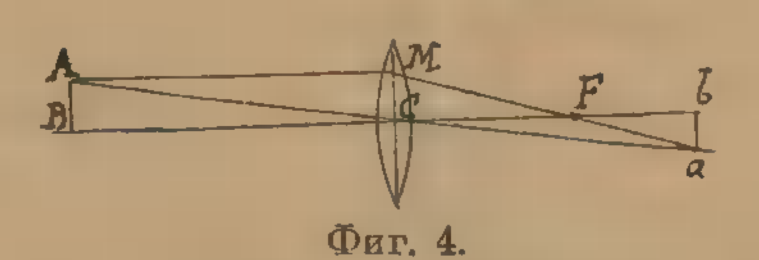



Фиг. 3.

$\triangle\, AMa \infty CFa$; слѣдовательно стороны пропорціональны, но $\frac{AM}{CF} < 2\ (AM < 2F)$; поэтому $\frac{Aa}{Ca} = \frac{AC + Ca}{Ca} < 2$; $AC < Ca$; $\frac{AC}{Ca} < 1$. $\triangle\, ABC \infty \triangle\, Cba$; но $\frac{AC}{Ca} < 1$, слѣдовательно $\frac{AB}{ab} < 1$; $AB < ab$. $\triangle\, MFC \infty \triangle\, Fba$; поэтому $\frac{MC}{ab} = \frac{CF}{Fb} < 1\ (MC = AB)$; откуда $Fb > F$ $(CF = F)$. Разстояніе изображенія отъ стекла $= Cb = F + Fb$. Слѣдовательно $Cb > 2F$.

## 4-й случай.

Разстояніе предмета отъ стекла $= 2F$ (чер. 4).




Фиг. 4.

$\triangle\ AMa \infty \triangle\, CFa$. Слѣдовательно $\frac{Aa}{Ca} = \frac{AM}{CF} = 2$ $(AM = BC = 2F$, а $CF = F)$; отсюда $Ca = {}^1/_2\, Aa$ т. е. $AC = Ca$. $\triangle ABC = \triangle Cab$ (углы при $C$ равны между собой, углы при $B$ и $b = d$ и сторона $AC = Ca$). Слѣдовательно $AB = ab$ ■ $BC = Cb$.

## 5-й случай.

Предметъ помѣщенъ передъ стекломъ на разстояніи большемъ $2F$, (чер. 5).




Фиг. 5.

$\triangle AMa \infty \triangle CFa$; но $\frac{AM}{CF} > 2$, слѣдовательно $\frac{Aa}{Ca} = \frac{AC + Ca}{Ca} > 2$;

$AC > Ca$; $\frac{AC}{Ca} > 1$. $\triangle ABC \infty \triangle Cba$; слѣдоват. $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{aC} > 1$; откуда $AB > ab$. $\triangle MCF \infty \triangle Fba$; но $\frac{MC}{ba} > 1$ $(MC = AB)$; слѣдоват. и $\frac{CF}{Fb} > 1$; откуда $Fb > F$; разстояніе изображенія отъ стекла $= CF + Fb$ т. е. $Cb < 2F$ и $> F$.

### 6-й случай.

Если разстояніе отъ предмета до стекла стремится къ безконечности, то отношенія $\frac{AM}{CF}$ и $\frac{Aa}{Ca}$ также стремятся къ безконечности; но $\frac{Aa}{Ca} = \frac{AC + Ca}{Ca}$; отсюда $\lim \frac{AC}{Ca} = \infty$. Въ подобныхъ треугольникахъ $ACB$ и $Cba$ предѣлъ отношенія $\frac{AB}{ab} = \frac{AC}{Ca}$ есть $\infty$; откуда слѣдуетъ $ab$ = безконечно малая, т. е. стремится къ точкѣ.

Ученикъ Оренбургской гимназіи *А. Лошкаревъ*.

---

# ЗАДАЧИ.

**№ 11.** Построить треугольникъ по радіусу круга вписаннаго и по двумъ высотамъ.

*С. Шатуновскій* (Одесса).

**№ 12.** При данномъ цѣломъ и положительномъ числѣ $a$ найти тригонометрическую функцію $F(x, a)$, значеніе которой при подстановкѣ вмѣсто $x$ любого цѣлаго и положительнаго числа равно остатку отъ дѣленія $x$ на $a$.

*Е. Буницкій* (Одесса).

---

# ЗАДАЧИ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ.

**№ 601.** Найти ариѳметическую прогрессію, въ которой средняя ариѳметическая всякихъ $n$ первыхъ членовъ равна числу этихъ членовъ.

(Заимств.) *Л. Магазаникъ* (Бердичевъ).

**№ 602.** Построить прямоугольный треугольникъ, зная медіаны одного изъ катетовъ $m_a$ и гипотенузы $m_c$.

*И. Ок—чъ* (Варшава).

**№ 603**. Рѣшить уравненіе

$$(1+x)^7+(1-x)^7=128.$$

*С. Адамовичъ* (Двинскъ).

**№ 604**. Рѣшить уравненіе:

$$\frac{(a-x)^5+(x-b)^5}{(a-x)^2+(x-b)^3}=(a-b)(a-x)(x-b).$$

(Заимств.) *Б. Дидковскій* (Кіевъ).

**№ 605**. Рѣшить систему:

$$\lg_y x-\lg_x y=\frac{8}{3},$$

$$xy=16.$$

(Заимств.) *Е. Е.*

**№ 606**. Въ стекляномъ баллонѣ вмѣщается, при температурѣ $10^0$ и давленіи 756 мм. 6,23 грамма сухого воздуха.

Какой вѣсъ будетъ имѣть двуокись углерода, наполняющая этотъ баллонъ при нормальныхъ условіяхъ?

Плотность двуокиси углерода 1,5; коэффиціентъ кубическаго расширенія стекла $\frac{1}{38700}$, и коэффиціентъ расширенія газа 0,004.

(Заимств.) *М. Гербановскій.*

# РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

**№ 532** (3 сер.). *Вычислить стороны треугольника, если даны периметръ его — 2p, сумма квадратовъ трехъ его сторонъ — $\delta^2$, а также извѣстно, что*

$$2bc=a(b+c).$$

Задача приводится къ рѣшенію системы уравненій:

$$a+b+c=2p \quad (1)$$

$$a^2+b^2+c^2=\delta^2 \quad (2)$$

$$abc=a(b+c) \quad (3)$$

Возвысивъ первое уравненіе въ квадратъ, подставивъ въ него $bc$ изъ третьяго уравненія и вычтя изъ полученнаго уравненія втрое, получимъ:

$$6bc=4p^2-\delta^2. \quad (4)$$

Подставивъ въ уравненіе (3) $bc$ изъ уравненія (4) [redacted] $b+c$ изъ уравненія (1), имѣемъ:

$$\frac{4p^2-\delta^2}{3}=a(2p-a),$$

откуда

$$a=p-\sqrt{p^2-\frac{4p^2-\delta^2}{3}}.$$

Въ этой формулѣ радикалъ взятъ со знакомъ —, такъ какъ сторона треугольника менѣе его полупериметра.

Подставивъ $a$ въ уравненіе (1), рѣшаемъ его совмѣстно съ уравненіемъ (4), [redacted] тогда опредѣлимъ $b$ и $c$.

*А. Гвоздевъ* (Курскъ); *П. Лисевичъ* (Курскъ); *Л. Магазаникъ* (Бердичевъ); *И. Поповскій* (Умань). *Я. Тепляковъ* (Кіевъ); *С. Адамовичъ* (Двинскъ); *А. Варенцовъ* (Шуя). Почти всѣ, рѣшившіе задачу, найдя $a$, не обратили вниманія на выборъ знака при радикалѣ.

**№ 536** (3 сер.). *Доказать, что прямая, проходящая черезъ двѣ точки, соотвѣтственно симметричныя основанію одной изъ высотъ треугольника относительно двухъ его сторонъ, проходитъ черезъ основанія двухъ другихъ его высотъ.*

Пусть $CE$, $BG$, $AF$ высоты треугольника $ABC$. Изъ точки $E$ проведемъ прямыя $EX$ и $EY$ соотвѣтственно перпендикулярно къ сторонамъ $AC$ и $BC$ треугольника $ABC$, а также соединимъ прямою точки $G$ и $F$. Прямая $GB$, по извѣстному свойству ортоцентрическаго треугольника $EGF$, есть биссектриса угла $EGF$; поэтому прямая $GA$ есть биссектриса угла, составленнаго прямой $GE$ и продолженіемъ прямой $GF$ отъ точки $G$. Слѣдовательно продолженіе прямой $GF$ и прямая $EX$ пересѣкаются въ нѣкоторой точкѣ $E'$, симметричной съ точкой $E$ относительно прямой $AC$, какъ это видно изъ равенства треугольниковъ $EKG$ [redacted] $E'KG$, гдѣ $K$ — точка встрѣчи прямыхъ $AC$ и $EX$. Точно также мы убѣдимся, что продолженіе прямой $GF$ отъ точки $F$ пересѣкается съ прямой $EY$ въ точкѣ $E''$, симметричной съ $E$ относительно стороны $BC$. Такимъ образомъ прямая $E'E''$ проходитъ черезъ точки $G$ и $F$.

*П. Полушкинъ* (Знаменка); *Б. Фрейманъ* (Тамбовъ).

**№ 537** (3 сер.). *Рѣшить уравненіе*

$$x^4+(1-x)^4=a.$$

При помощи подстановки

$$x=y+\frac{1}{2}$$

приводимъ данное уравненіе къ виду

$$y^4+\frac{3}{2}y^2+\frac{1}{16}-\frac{a}{2}=0,$$

откуда

$$y = \pm \frac{\sqrt{-3 \pm 2\sqrt{2(a+1)}}}{2},$$

а

$$x = \frac{1}{2}\left[1 \pm \sqrt{-3 \pm 2\sqrt{2(a+1)}}\right].$$

*Б. Клигманъ* (Одесса); *А. Гвоздевъ* (Курскъ); *П. Лисевичъ* (Курскъ); *Я. Тепляковъ* (Кіевъ); *К. Пеніожкевичъ* (Лубны); *Л. Магазаникъ* (Бердичевъ).

**№ 538** (3 сер.). ***Рѣшить уравненія:***

$$x^3 - y^2 + x = xy(x + y + 1) + a(x - y);$$

$$y^3 - x^2 + y = y^2(x + y + 1) + b(x - y).$$

Вычитая почленно данныя уравненія и перенося всѣ члены новаго уравненія въ первую часть, получимъ:

$$(x - y)(x^2 + x - a + b + 1) = 0,$$

откуда или

$$x = y,$$

или

$$x^2 + x - a + b + 1 = 0.$$

При первомъ предположеніи одно изъ данныхъ уравненій приводится къ виду

$$x^3 + 2x^2 - x = 0,$$

откуда

$$x_1 = y_1 = 0,\ x_2 = y_2 = -1 + \sqrt{2},\ x_3 = y_3 = -1 - \sqrt{2}.$$

Второе предположеніе даетъ два корня для $x$. Подставляя каждый изъ корней въ первое изъ данныхъ уравненій, получимъ два квадратныхъ уравненія относительно $y$.

*А. Гвоздевъ* (Курскъ); *К. Пеніонжкевичъ* (Лубны); *С. Адамовичъ* (Двинскъ); *Кязымбекъ Годжаманбековъ* (Баку). Неполныя рѣшенія дали: *П. Лисевичъ* (Курскъ) и *Б. Фрейманъ* (Тамбовъ).

**№ 549** (3 сер.). ***Рѣшить уравненіе***

$$8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x = 0.$$

Дѣля обѣ части уравненія на $27^x$, представимъ его въ видѣ

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0.$$

Полагая

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = z, \qquad (1)$$

находимъ:

$$z^3+z-2=0=(z-1)(z^2+z+2).$$

Дѣйствительный корень этого уравненія есть $z=1$. Изъ равенства (см. 1)

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x=1$$

слѣдуетъ, что $$x=0.$$

*В. Шатуновъ* (Полтава); *Л. Магазаникъ* (Бердичевъ); *А. Варенцовъ* (Ростовъ на Дону).

**№ 550** (3 сер.). *Если діагонали трапеціи взаимно перпендикулярны, то сумма квадратовъ ихъ равна квадрату суммы параллельныхъ сторонъ трапеціи.*

Пусть $AB$ и $CD$ — параллельныя стороны трапеціи, $AD$ и $BC$ — ея діагонали. Черезъ точку $D$ проведемъ прямую, параллельную діагонали $CB$, до встрѣчи въ точкѣ $E$ съ прямой $AB$. Тогда

$$\overline{AD}^3+\overline{CB}^2=\overline{AD}^2+\overline{DE}^2=(\overline{AB}+\overline{BE})^2=(\overline{AB}+\overline{CD})^2.$$

*А. Грабовскій* (ст. Павелецъ); *Я. Тепляковъ* (Кіевъ); *Л. Магазаникъ* (Бердичевъ); *В. Шатуновъ* (Полтава); *А. Варенцовъ* (Ростовъ на Дону).

**№ 554** (3 сер.). *Данъ объемъ* A *прямого цилиндра съ круговыми основаніями. Опредѣлить радіусъ основанія и высоту, при которыхъ онъ будетъ имѣть наименьшую величину поверхности.*

Пусть $x$ радіусъ основанія, $y$ — высота, $s$ — поверхность цилиндра. Тогда

$$\pi x^2 y=A,$$

$$s=2\pi xy+2\pi x^2,$$

или, на основаніи перваго уравненія,

$$s=\frac{2A}{x}+2\pi x^2=\frac{A}{x}+\frac{A}{x}+2\pi x^2.$$

Произведеніе трехъ слагаемыхъ $\frac{A}{x}$, $\frac{A}{x}$, $2\pi x^2$ есть величина постоянная; ихъ сумма будетъ minimum (при условіи $x>0$), если они станутъ равны между собой, т. е. если

$$\frac{A}{x}=2\pi x^2,$$

откуда

$$x = \sqrt[3]{\frac{A}{2\pi}}, \quad y = \sqrt[3]{\frac{4A}{\pi}} = 2x.$$

Такимъ образомъ высота искомаго цилиндра равна его діаметру.

*А. Варенцовъ* (Ростовъ на Дону); *Н. С.* (Одесса); *В. Шатуновъ* (Полтава).

**№ 557** (3 сер.). *Найти сумму*

$$100^2 - 99^2 + 98^2 - \ldots 2^2 - 1.$$

Данное выраженіе приводится къ виду

$$(100+99)(100-99)+(98+97)(98-97)+\ldots+(2+1)(2-1)=$$

$$=100+99+98+97+\ldots+2+1=\frac{(100+1)\,100}{2}=5050.$$

*Л. Магазаникъ* (Бердичевъ); *Я. Тепляковъ* (Кіевъ); *А. Варенцовъ* (Ростовъ на Дону); *Ѳ. Бѣлоярцевъ* (Казань); *Л. Мирлесъ* (Казань).

**№ 555** (3 сер.). *Доказать, что высшая степень, въ которой первоначальное нечетное число* p *входитъ множителемъ въ произведеніе*

$$1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \ldots (2m+1)$$

*равна*

$$\left[E\left(\frac{2m+1}{p}\right)-E\left(\frac{m}{p}\right)\right]+\left[E\left(\frac{2m+1}{p^2}\right)-E\left(\frac{m}{p^2}\right)\right]+\left[E\left(\frac{2m+1}{p^3}\right)-\right.$$

$$\left.-E\left(\frac{m}{p^3}\right)\right]+\ldots,$$

*гдѣ* E *означаетъ наибольшее цѣлое число, заключающееся въ числѣ, стоящемъ въ скобкахъ. Формула должна быть продолжена до тѣхъ поръ, пока всѣ дальнѣйшіе члены не обратятся въ нули.*

Представляя наше выраженіе въ видѣ

$$\frac{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (2m+1)}{2 \,.\, 4 \ldots 2m} = \frac{1 \,.\, 2 \ldots 2m+1)}{2^m \,.\, 1 \,.\, 2 \ldots m},$$

находимъ, что искомая степень $p$ есть разность высшихъ степеней, въ которыхъ оно входитъ соотвѣтственно въ числа $1 \,.\, 2 \ldots (2m+1)$ и $1 \,.\, 2 \,.\, \,.\, m$. Выражая эти числа по извѣстной формулѣ*), получимъ искомое выраженіе.

*Я. Полушкинъ* (Знаменка); *Ѳ. Бѣлоярцевъ* (Казань).

---

*) См. Вѣстникъ № 260, статью „О разложеніи произведенія $1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m$ на первоначальные множители“. *Е. Буницкаго.*

**№ 559** (3 сер.). *Опредѣлить предѣлъ къ которому стремится произведенiе*

$$\cos A \cdot \cos\frac{A}{2} \cos\frac{A}{4} \ldots \cos\frac{A}{2^n}$$

*при увеличенiи* n *до безконечности.*

Перемноживъ равенства

$$\cos A = \frac{\sin 2A}{2\sin A}, \quad \cos\frac{A}{2} = \frac{\sin A}{2\sin\frac{A}{2}}, \quad \cos\frac{A}{4} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{4}}, \ldots$$

$$\ldots \cos\frac{A}{2^n} = \frac{\sin\frac{A}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{A}{2^n}},$$

получимъ:

$$\cos A \cdot \cos\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{A}{4} \cdots \cos\frac{A}{2^n} = \frac{\sin 2A}{2^{n+1}\sin\frac{A}{2^n}} = \frac{\sin 2A}{2A} \cdot \frac{\frac{A}{2^n}}{\sin\frac{A}{2^n}}.$$

При увеличенiи $n$ до безконечности второй множитель стремится къ единицѣ, и потому искомый предѣлъ есть

$$\frac{\sin 2A}{2A}.$$

*Я. Полушкинъ* (Знаменка); *И. Дембковскiй* (Севастополь); *Л. Мирлесъ* (Казань).

**№ 560** (3 сер.). *Доказать, что при* n *цѣломъ выраженiе*

$$n^6 - 2n^4 - 3n^3 + n^2 - 6n$$

*всегда дѣлится безъ остатка на 9.*

Если $n$ кратно 3, то каждый членъ даннаго выраженiя дѣлится на 9.

Если же $n = 3k \pm 1$, то, разлагая каждый членъ по формулѣ бинома, и отбирая послѣднiе члены разложенiй, мы найдемъ, что данное выраженiе равно суммѣ двухъ чиселъ, изъ которыхъ одно кратно 9, а другое равно

$$(\pm 1)^6 \quad 2(\pm 1)^4 - 3(\pm 1)^3 + (\pm 1)^2 - 6(\pm 1) = \pm 9$$

Такимъ образомъ данное выраженiе всегда дѣлится на 9.

*И. Полушкинъ* (Знаменка); *И. Дембовскiй* (Севастополь); *А. Варенцовъ* (Ростовъ на Дону); *Л. Мирлесъ* (Казань).

**№ 561** (2 сер.). *При какихъ условіяхъ выраженіе*

$$7^{2n+4} - 2^{4n+2},$$

*гдѣ* n *есть цѣлое положительное число, дѣлится на 65 безъ остатка?*

Представивъ данное выраженіе въ видѣ

$$(65 - 2^4)^{n+2} - 2^{4n+2} = (65 - 2^4)^{n+2} - (-2^4)^{n+2} + (-2^4)^{n+2} - 2^{4n+2}$$

и замѣчая, что разность степеней

$$(65 - 2^4)^{n+2} - (-2^4)^{n+2}$$

дѣлится на разность основаній, равную 65, находимъ, что дѣлимость даннаго выраженія на 65 зависитъ отъ дѣлимости выраженія

$$(-2^4)^{n+2} - 2^{4n+2}.$$

Прй $n$ четномъ это выраженіе равно

$$2^{4n}(2^8 - 2^2) = 2^{4n}.252,$$

а прй $n$ нечетномъ —

$$-2^{4n}(2^8 + 2^2) = -2^{4n}.260.$$

Только второе изъ этихъ двухъ выраженій дѣлится на 65, откуда видно, что $n$ должно быть нечетное.

*П. Полушкинъ* (Знаменка); *Ѳ. Бѣлоярцевъ* (Казань); *Л. Магазаникъ* (Бердичевъ); неполное рѣшеніе далъ *А. Варенцовъ* (Ростовъ на Дону).

# ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

## Bulletin de la Société Astronomique de France.

### № 9—1899.

**Les étoiles filantes du 10 Août.** *C. Flammarion.* Въ ночь 10 августа 1898 года въ Обсерваторіи Жювиза съ 10 до 2½ ч. ночи, не смотря на свѣтъ луны съ полуночи, нанесено на карту 105 Персеидовъ. Въ Listrae 12 августа съ 9½ ч. до 11 ч. 47 м.—21 Персеидъ. Въ Onival-Sur-Mer съ 9 до 11 ч. 10 августа около 60. Въ Руанѣ въ ночь 10—11 августа съ 9 до 11 ч. 40 м. замѣчено 200, а въ ночь 11—12 съ 9 до 11 ч.—150. Кромѣ Персеидовъ въ эти ночи наблюдались звѣзды съ радіантами въ другихъ созвѣздіяхъ: Лебедѣ, Жирафѣ, Драконѣ. Яркость нѣкоторыхъ превосходила звѣзды въ величинѣ.

**Le point radiant du 17 Decembre 1897.** *W. F. Denning.* Найденный Либертомъ радіантъ падающихъ звѣздъ 17 декабря съ координатами 62° и + 49° повидимому соотвѣтствуетъ очень продолжительному метеорному дождю, наблюдавшемуся 5 послѣднихъ мѣсяцевъ истекшаго 1897 г. Почти тѣ же координаты получились: 4—9 ноября 1877 г., 13—14 ноября 1879, 28 ноября—10 Декабря 1885 г. Звѣзды, исходящія изъ этого радіанта, имѣютъ очень быстрое движеніе.

**L'usage des cerf-rolants à l'observatoire de Blue-Hill pour obtenir les observations météorologiques.** *A. L. Botch.* Для метеорологическихъ наблюденій

въ высшихъ слояхъ атмосферы горныя станціи и аэростаты по нѣкоторымъ причинамъ неудобны, а потому явилась мысль поднимать самописцы на змѣяхъ. Въ Америкѣ первая попытка была сдѣлана въ Обсерваторіи Blue-Hill (Соединенные Штаты) въ 1894 г., а въ 1896 г по предложенію Botch'а рѣшено было устроить 20 станцій для спусканія змѣевъ, чтобы имѣть для опредѣленнаго часа каждаго дня метеорологическіе элементы для одной и той же высоты. Полное описаніе приборовъ, употреблявшихся съ 1897 г. и разборъ полученныхъ результатовъ помѣщены въ Annale of Harvard College Observatori rol XLII part I. Въ настоящее время тамъ пользуются змѣями системы Hangrave въ которыхъ на квадратный метръ дѣятельной поверхности, величина которой доходитъ до 6 кв м., приходится вѣсу 550—850 гр Змѣи поднимаются подъ углами 50°—60° при скорости вѣтра въ 8 м. Въ 1896 г. веревки замѣнены стальными проволоками, вѣсящими почти втрое меньше (430 gr. на 100 м вмѣсто 1180 gr.) и имѣющими вчетверо менѣе вредную поверхность, благодаря чему змѣи стали подниматься вчетверо выше, такъ: въ 1895 году средняя высота поднятія = 500 м., тогда какъ въ послѣдніе мѣсяцы 1897 г. эта средняя = 1960 м, причемъ разъ метеорографъ поднялся на 3570 м. н дъ уровнемъ моря. (Въ этотъ разъ кромѣ змѣя, идущаго во главѣ имѣлось еще три для подвѣса проволоки; полная дѣятельная поверхность ихъ = 14,2 кв. м., длина смотанной проволоки=6300 м., натяженіе у ворота=51—68 кило). Два раза удалось поддерживать метеорографъ въ теченіе большей части сутокъ на 500 м. Въ 1895 г. метеорографъ состоялъ только изъ барометра и анемометра. Въ 1896 г. Richard построилъ тройной метеорографъ. Фергюсонъ затѣмъ построилъ метеорографъ, дающій записи барометра, термометра, гигрометра и анемометра.

Преимущества змѣевъ предъ шарами—зондами слѣдующія 1) меньше издержекъ: 2) можно тригонометрически опредѣлить точно высоту; 3) благодаря лучшей вентиляціи и отсутствію лучеиспусканія нагрѣтой поверхности шара, термометръ показываетъ истинную температуру; 4) данныя, получаемыя въ такихъ случаяхъ, относятся къ мѣсту, лежащему надъ мѣстомъ пусканія змѣя, что даетъ возможность сравнивать записи на высотѣ и на низу и 5) при быстрыхъ поднятіяхъ и опусканіяхъ можно имѣть почти одновременныя данныя для весьма различныхъ слоевъ.

**La photographie des phénomènes atmosphériques.** *G. Mathieu et E. Antoniadi.* Для изученія нѣкоторыхъ атмосферныхъ явленій (облаковъ, радуги, молніи и др.) въ Жювизи предпринято фотографированіе ихъ. Въ зависимости отъ характера снимаемыхъ объектовъ требуется различная поза. Иногда для ослабленія дѣйствія синяго фона неба приходится прибѣгать къ желтымъ экранамъ (стеки, сосудъ съ параллельными стѣнками съ слабымъ растворомъ двухромокаліевой соли). Для снимка радуги потребовалась поза въ $\frac{1}{10}$ сек. (ортоперископическій объективъ Derogy съ отверстіемъ 0,038 м., фок. разст 0,228 м., діафрагма на $\frac{f}{18}$ панхроматическія пластинки Люмьера). Фотографія указываетъ, что пространство внутри радуги свѣтлѣе внѣшняго.

Для фотографированія „Cirrus" при закатѣ солнца потребовалась поза въ 1 сек. при объективѣ Леви и изохроматическихъ пластинкахъ Люмьера, для Cirro-Stratus—поза $\frac{1}{2}$ сек.

**Nuaget et éclairs.** *Quénisset. E. Touchet.* Обыкновенно на снимкахъ видовъ облаковъ не видно и это потому, что поза слишкомъ велика; достаточно ее уменьшить и контрасты обнаружатся. Что касается Cirrus, Stratus и Cirro cumulus, богатыхъ желтыми лучами, то для фотографированія ихъ уменьшенія позы недостаточно, а нужно пользоваться ортохроматическими пластинками и желтымъ экраномъ. Для фотографированія молніи нужно только приспособленіе (обскураторъ) для полученія очень короткой позы.

**Photographie de la vitesse radiale des étoiles.** *H. Deslandres.* На основаніи принципа Допплеръ-Физо можно, какъ извѣстно, изучивъ спектръ звѣзды и сравнивъ его со спектромъ земныхъ тѣлъ, опредѣлить радіальную скорость звѣзды. Для большей точности звѣздный спектръ въ видѣ узкой полоски

фотографируется между двумя половинами земного спектра и затѣмъ на фотографіи при помощи микроскопа съ микрометромъ измѣряется смѣщеніе спектральныхъ линій. Такія изслѣдованія правильно ведутся въ Парижѣ, Потсдамѣ и Пулковѣ. На основаніи подобныхъ изслѣдованій Бѣлопольскій нашелъ, что $\delta$ Цефея и $\eta$ Орла имѣютъ движеніе по орбитѣ, такъ какъ ихъ радіальная скорость періодически измѣняется Тоже найдено для $\alpha$ Дѣвы и $\alpha$ Орла. Въ $\beta$ Возницы Пиккерингъ нашелъ двоеніе спектральныхъ линій, причемъ разстояніе слагающихъ одной и той же линіи періодически измѣняется; отсюда выводъ: $\beta$ — звѣзда двойная, обѣ звѣзды движутся въ противоположныя стороны около общаго центра тяжести — Приложены фотографіи спектровъ Капеллы, $\beta$ Возницы, Сиріуса и $\gamma$ Пегаса съ земными спектрами рядомъ.

**Observations de Mars faites pendant l'opposition de 1896—97.** Par. *Cerulli C. F.* Наблюдая Марсъ во время оппозиціи 1896—97 гг., Cerulli точно опредѣлилъ ареоцентрическіе координаты 60 точекъ его поверхности, что дало ему возможность составить карту Марса. Сравненіе ея съ картой Скіапарелли показываетъ измѣненія, происшедшія въ промежутокъ времени 1877—1897 г. Какъ напримѣръ такого измѣненія можно указать на видъ Эритрейскаго моря: у Скіапарелли здѣсь видна поверхность сѣраго цвѣта, на которой выдѣляются болѣе блѣдныя мѣста — Argyre Noachis Pyrrha, Deucalion; у Черулли это мѣсто представляется блѣднымъ, окруженнымъ темной овальной полосой, верхняя часть которой имъ названа Mare Prasodes. Во время своихъ наблюденій онъ также замѣтилъ нѣкоторыя измѣненія на Марсѣ; такъ напримѣръ: въ первые 3 мѣсяца наблюденій Уао, Pharos и Sinus Sabacus составляли одно пятно, а затѣмъ они обособились; точно также Атлантида 21 іюня представлялась бѣлымъ языкомъ справа отъ моря Сиренъ; 23 іюля ее нельзя было отдѣлить отъ м. Сиренъ и Тиренскаго м.; 11 декабря она вновь появилась, будучи свинцоваго цвѣта. - На картѣ Черулли видно много каналовъ: есть тѣ же, что у Скіапарелли и у Лоуэля, но есть и новые. Самъ Черулли не вѣритъ въ дѣйствительное существованіе ихъ; еели бы каналы дѣйствительно существовали, то они были-бы тѣмъ отчетливѣе, видны, чѣмъ ближе къ нимъ Марсъ и чѣмъ они сами ближе къ центральному въ данный моментъ меридіану, чего ему замѣтить не удалось; онъ склоненъ думать, что каналами нимъ представляются линіи, соединяющія болѣе темныя пятна поверхности.

**La gémination des canaux de Mars. S. Meunier. Dédoublement des canaux de Mars.** *Cecil Dolmage.* Dolmage дѣлаетъ новую попытку объяснить двоеніе каналовъ Марса. По мнѣнію ея при наступленіи лѣта на Марсѣ изъ полярной области, или изъ каналовъ, испаряется гипотетическое вещество, обладающее двойнымъ лучепреломленіемъ.

**Nouvelles relations de l'éclipse de Lune du 3 Juillet 1898.** *G. A.* **Ephémérides de Mars pour 1898.**

**Observations mété rologiques à Vals (Ardèche) de 1867 à 1896.** *Th. Moureaux.*

**Rapport sur un mémoire de M. Gaigneur relatif à deux instruments nouveaux** *M. Touché.* Gaigneur описалъ въ своемъ мемуарѣ два новыхъ прибора: Longilatitudimètre и Trigonosphéromètre. Первый состоитъ изъ совокупности большихъ круговъ шара, изображающихъ горизонтъ, экваторъ, меридіанъ и т. д., всѣ они подвижны и одинъ изъ нихъ снабженъ зрительной трубой; приборъ можетъ замѣнять то теаделитъ, то экваторіалъ и даетъ возможность легко рѣшать задачи практической астрономіи, каковы—опредѣленіе меридіана широты, времени и т. д. Приборъ поддерживается кардановскимъ сочлененіемъ чтобы можно было имъ пользоваться на морѣ.—Второй приборъ представляетъ упрощеніе перваго и служитъ для практическаго рѣшенія сферическаго треугольника. Оба прибора при хорошей конструкціи годятся въ дѣло, если не требуется особой точности.

**Nouvelles de la Science Variétés.**

**Le ciel du 15 Sept. au 15 Oct.**

*К. Смоличъ.* (Умань).

# ДОСТАВЛЕННЫЯ ВЪ РЕДАКЦІЮ КНИГИ и БРОШЮРЫ.

205. **Начала тригонометріи** (гоніометрія и прямолинейная тригонометрія). Курсъ среднихъ учебныхъ заведеній. Составилъ преподаватель Прилукской Гимназіи *И. Россоптовскій.* Кіевъ. 1900. Ц. 60 к.

206. *Вольфъ*, проф. Сорбонны, астрономъ Парижской Обсерваторіи. **Космогоническія гипотезы.** Переводъ подъ ред. д-ра философіи *М. Филиппова*, члена русскаго астрономическаго общества (Библіотека «Научнаго Обозрѣнія»). Спб. Ц. 60 к.

207. *Ferdinand Löwl*, prof. uniw. w Czerniowicach. **Zarys nauki o skałach** dla turistów i samouków tłumacz ł z niemieckiego. *Zygmunt Weyberg.* Dodatek bezpłatny do tygodnika „Wszechświat". Warszawa. 1900.

208. **Взглядъ на воспитаніе и обученіе въ Россіи.** Краткій историческій очеркъ. Составилъ *Ст. Немолодышевъ.* Съ 6-ю портретами въ текстѣ. Харьковъ. 1898. Ц. 60 к.

209. *С. А. Немолодышевъ.* **Изъ исторіи педагогическихъ теорій.** А. Коменскій, Дж. Локкъ, Ж. Ж. Руссо, Базедовъ, Г. Песталоцци, Фр. Фребель. Докладъ, читанный въ засѣданіи Педагогическаго Отдѣла, состоящаго при Императорскомъ Харьковскомъ Университетѣ Историко-Филологическаго Общества, 6-го февраля 1896 г. Харьковъ. 1899. Ц. 20 к.

210. *С. А. Немолодышевъ.* **Педагогическія воззрѣнія Московскаго митрополита Платона** (р. 1737 † 1812). Харьковъ. 1899.

211. **Hydrodynamika.** Sepsal Dr. *Fr. Koláček.* (Sbornik Jednoty českých Mathematiků v Praze. čislo II) Praga. 1899

212. **Uvod do uauky o determinantech.** Sepsal Dr. *F. J. Studnička* (Sbornik Jednoty českých Mathematiků v Praze. čislo III). Praga. 1899.

213. Либавское Отдѣленіе Императорскаго Русскаго Техническаго Общества. Отчетъ за 1899 г. Либава.

214. *Plato v. Reussner.* **Morceaux choris de leture française.** 1-ére édition. Varsavie. 1899. Livraisons 4—7.

215. **Геометрическія формулы для VIII класса гимназій.** *А. Веребрюсова.* Кѣльцы. 1900. Ц. 30 к.

---

Редакторъ **В. А. Циммерманъ.** Издатель **В. А. Гернетъ.**

Дозволено цензурою, Одесса, 18-го Сентября 1900 г.

Типографія Г. М. Левинсона, Ришельевская, домъ № 19.